

有限要素法による円形テーパ導波管の電磁界解析

その他（別言語等） のタイトル	Electromagnetic Analysis of Circular Taper Waveguide Using Finite Element Method
著者	大西 孝臣, 黒島 利一, 杉岡 一郎
雑誌名	室蘭工業大学研究報告. 理工編
巻	43
ページ	1-18
発行年	1993-11-25
URL	http://hdl.handle.net/10258/597

有限要素法による 円形テーパ導波管の電磁界解析

大西 孝臣^{*}, 黒島 利一^{**}, 杉岡 一郎^{**}

Electromagnetic Analysis of Circular Taper Waveguide Using Finite Element Method

Takaomi OHNISHI, Toshikazu KUROSHIMA and Ichiro SUGIOKA

Abstract

The taper waveguide is useful to make short the length of matching device between different characteristic impedances. The taper profile may produce the propagation mode transformation. So, it is remarkable to design the profile of taper waveguide. For multi-mode analysis, the method based on transmission line model is not so applicable.

In this paper, we discuss the technique of multi-mode analysis of circular taper waveguide using finite element method (FEM) first. Next, the results of analysis by the program we developed may be shown.

As the result, using axis-symmetric triangular ring elements shows a peak of the absolute value of complex mode amplitude of transverse magnetic field in a taper waveguide. That mode cannot propagate through the uniform waveguide with same cross section. This show the affection by the taper shape of waveguide.

1. はじめに

テーパ形伝送線路は、特性インピーダンスの異なる線路を整合させるために用いられ、伝搬するマイクロ波の進行方向について滑らかな特性インピーダンス変化を持つ線路である。滑らかなインピーダンス変化をしているので、電圧反射係数等に関してより良い周波数特性が得られることが期待できる。また、マイクロ波素子が小型化される趨勢にあるので、決まった長さの範囲内で広帯域の伝送特性を持ったテーパ形状の設計は重要である。

さらに、テーパ形伝送線路を改良する場合などにおいて、テーパ部の途中で基本モードのカットオフ点となる断面があるようなケースやそれに近いケースが出てくるため、入射された基本モードが途中でモード変換を起こす可能性があることが分かってきた。その事実を検証するためには、マルチモードについての解析が必要である。

また、テーパ形導波管の形状のわずかな誤差が導波管内の電磁場に大きな影響を与えるので、

^{*} 室蘭工業大学大学院博士前期課程 平成5年3月修了 (現在、苫小牧工業高等専門学校)

^{**} 室蘭工業大学

経験に頼ったトライアル・アンド・エラーによるテーパ形状の設計・開発には限界がある。したがって、何らかの理論的根拠に基づいた設計指針が必要である。

そこで本研究では、数値解法の1つである有限要素法を用いて、円形テーパ導波管のモード伝達問題について解析を行った。

2. 問題の定式化

まず簡単のために、問題の基本的解釈として、時間調和な定常かつ線形の問題に限定し、導波管内の媒質を、均質、等方、線形性を示すものとし、導波管の内壁表面も完全導体、即ち導電率を無限大にできる場合を対象にした。このような条件の下で、導波管内の界を支配する方程式として用いられるのは、印加電流及び電流源の無い場合のフェザー表示の Maxwell 方程式、

$$\begin{aligned}\nabla \times \bar{\mathbf{E}} &= -j \omega \mu \bar{\mathbf{H}} \\ \nabla \times \bar{\mathbf{H}} &= j \omega \epsilon \bar{\mathbf{E}}\end{aligned}\tag{1}$$

あるいは、ベクトル型の Helmholtz 方程式、

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} + \omega^2 \epsilon \mu \bar{\mathbf{E}} &= \bar{\mathbf{0}} \\ \nabla^2 \bar{\mathbf{H}} + \omega^2 \epsilon \mu \bar{\mathbf{H}} &= \bar{\mathbf{0}}\end{aligned}\tag{2}$$

などである。ただし、 ω は入射波の角周波数、 ϵ 、 μ は導波管内の誘電率、透磁率、“ ∇^2 ” はベクトル Laplace 演算子である。ここでは、問題を有限要素法に導入する際に、問題の近似解の自由度を大きくするために、(2) 式における磁界に関する方程式 (第2式) を採用して解析を行った。次に、2つの媒質の境界についての電磁気学的考察¹⁾を行うと、Maxwell 方程式や、Gauss の発散定理、Stokes の定理等のベクトル解析における定理から、以下の磁界に関する境界条件が導出される。

- 完全導体、短絡終端、あるいは電気壁に関する境界条件として、次の斉次 Neumann 条件、

$$(\nabla \times \bar{\mathbf{H}}) \times \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{0}}\tag{3}$$

- 電界の対称面、開放終端、あるいは磁気壁に関する境界条件として、次の斉次 Dirichlet 条件、

$$\bar{\mathbf{H}} \times \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{0}}\tag{4}$$

- 磁界の横場の決まった開口終端に関する境界条件として、次の非斉次 Dirichlet 条件、

$$\bar{\mathbf{H}} \times \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{p}}\tag{5}$$

ただし、 $\bar{\mathbf{n}}$ は導波管外部へ向いた導波管表面に関する単位法線ベクトル、 $\bar{\mathbf{p}}$ は境界面における磁

界の接線成分である。以上、(2)、(3)、(4)及び(5)式を基本として本研究で扱う問題をベクトル Helmholtz 方程式による境界値問題の形で表わした。

次に、この境界値問題を有限要素法に導入するために、積分汎関数を用いた変分問題を導く必要がある。そこで(6)式を(2)式の磁界に関する式を Euler 方程式²⁾とする積分汎関数として導入する。

$$F(\bar{H}) = \int_V \left\{ \frac{1}{\epsilon_r} (\nabla \times \bar{H})^* \cdot (\nabla \times \bar{H}) - (\omega^2 \epsilon_0 \mu_0) \mu_r \bar{H}^* \cdot \bar{H} \right\} dV \quad (6)$$

ただし、 ϵ_r 、 μ_r は、導波管内の場の真空に対する比誘電率、比透磁率である。この(6)式の第1変分²⁾ δF を求め、変分原理にしたがって δF を0にすると、(2)式の磁界に関する式(第2式)と(3)式が導出される。(3)式は自然境界条件として(6)式に吸収される。(4)及び(5)式は基本境界条件として(6)式とは別に評価する。以上により、(6)、(4)及び(5)式で変分問題を導出したことになるが、本研究における問題のような導波路の不連続問題を扱う場合、(4)及び(5)式とは別の特性インピーダンス終端に関する境界条件を導出すると便利である。これについては第5節で述べる。

3. 円形テーパ導波管

本研究では図-1のような次第に径が変化する、テーパ形の円形導波管を対象にしてモード解析を行う。

ここで、 z は入射波の進行方向、入出力端の特性インピーダンスは Z_1 、 Z_2 、テーパ導波管の長さを l とする。このような伝搬方向に不連続を持つ線路に対してユニ・モードの伝搬を解析する場合、(7)式を基本とした伝送線路モデルを用いた解析法³⁾がある。

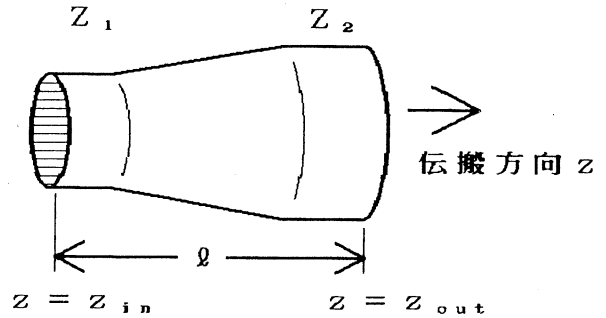


図-1 円形テーパ導波管

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dz} &= -ZI \\ \frac{dI}{dz} &= -YV \end{aligned} \quad (7)$$

ただし V 、 I は伝送線路の電圧と電流、即ちモードの電界、磁界の振幅を表わす測度であり、 Z 、 Y は単位長当りの直列インピーダンス、並列アドミタンスである。また、(8)式のように、位置 z における伝搬定数 γ 、特性インピーダンス Z_0 、反射係数 ρ を導入する。

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sqrt{ZY} \\
Z_0 &= \sqrt{Z/Y} \\
\rho &= \frac{V/I - Z_0}{V/I + Z_0}
\end{aligned} \tag{8}$$

(8) 式の導入により, (7) 式から (9) 式の ρ に関する 1 階非線形微分方程式を導くことができる。

$$\frac{d\rho}{dz} - 2\gamma\rho + \frac{1}{2}(1 - \rho^2) \frac{d\{\ell n(Z_0)\}}{dZ} = 0 \tag{9}$$

ここで, 問題の目的が線路のテーパ部における影響による入射波の反射が小さくなるように設計することであるから, (9) 式に「 $\rho^2 \ll 1$ 」という仮定を与えて, (10) 式のように線形化することができる。

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dz} - 2\gamma\rho + F(z) &= 0 \\
F(z) &= \frac{1}{2} \frac{d\{\ell n(Z_0)\}}{dz}
\end{aligned} \tag{10}$$

ここで, (10) 式の $F(z)$ は, 位置 z における特性インピーダンスの変化による反射の度合を示している。

(10) 式に終端 ($z = z_{\text{out}}$) における境界条件「 $\rho = 0$ 」を施し, ρ について解いた解 $\rho(z)$ に $z = z_{\text{in}}$ を代入すると, (11) 式のテーパ導波管全体としての入力端における反射係数 $\rho(z_{\text{in}}) = \rho_{\text{in}}$ が得られる。

$$\rho_{\text{in}} = \int_{z_{\text{in}}}^{z_{\text{out}}} F(z') \exp \left[-2 \int_{z_{\text{in}}}^{z'} \gamma(\xi) d\xi \right] dz' \tag{11}$$

4. 有限要素によるモデリング

本研究において導波管のモデル化に用いた有限要素は, 図-3 及び図-4 に示す共に 2 次 Lagrange⁴⁾ のアイソパラメトリック⁴⁾ な 6 節点軸対称三角形リング要素⁴⁾ (図-3) 及び 10 節点四面体要素⁴⁾ (図-4) である。

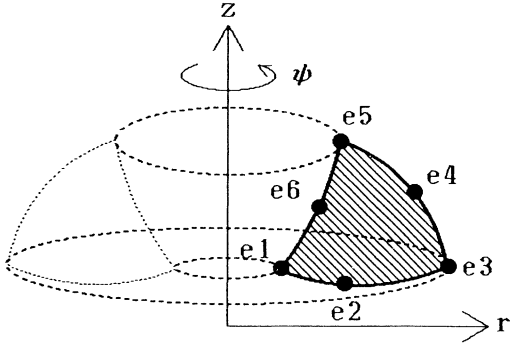


図-2 軸対称三角形リング要素

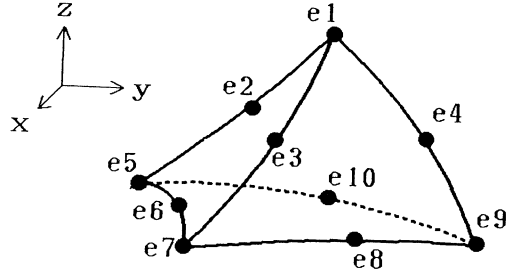


図-3 四面体要素

図-2 及び図-3 の各要素には節点に対応して、節点と同数の基底関数があり、Lagrange 要素は Lagrange 多項式を基底関数として用いている。この基底関数により、要素の各節点における問題の未知変数 \bar{H} (軸対称の 3 次元要素の場合は、 (H_r, H_ϕ, H_z) 、四面体要素の場合は (H_x, H_y, H_z)) の値が算出できれば、各節点値を係数にした基底関数の一次結合をとることによって、即ち各節点値を Lagrange 補間することによって、その未知変数の要素内の任意の位置における値を近似することができる。言い替えると、有限要素を導入することによって、場の未知変数の値の分布を各節点に関して離散化することが可能になる。これを場全体にまとめると、ベクトル $[H_r]$ 、 $[H_\phi]$ 、 $[H_z]$ のようになる。

この有限要素による離散化によって、導波管内の全領域 V について、(6) 式の核となる積分汎関数が (12) 及び (13) 式のような二次形式の形に離散化できる。

$$\int_V (\nabla \times \bar{H})^* \cdot (\nabla \times \bar{H}) dV \doteq [H^*]^T [K] [H] \quad (12)$$

$$\int_V \bar{H}^* \cdot \bar{H} dV \doteq [H^*]^T [M] [H] \quad (13)$$

ここで、本研究で用いている 2 次 Lagrange 要素である図-2 及び図-3 の「節点 e_i 」に対応した基底関数を N_{e_i} とし、(19) 及び (20) 式のように基底関数を並べた列ベクトルを $[N]$ とすると、三角形リング要素について、(12) 及び (13) 式は (14) 及び (15) 式のように離散化される。

$$\begin{aligned}
 & \int_v (\nabla \times \bar{H})^* \cdot (\nabla \times \bar{H}) dV \\
 & \doteq \begin{pmatrix} [H_r'^*] \\ [H_\varphi'^*] \\ [H_z'^*] \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \int_v \{ [N]_{\partial z} [N]_{\partial z}^T + (s^2/r^2) [N] [N]^T \} dV \\ \int_v \{ (s/r) [N]_{\partial r} [N]^T + (s/r^2) [N] [N]^T \} dV \\ - \int_v [N]_{\partial r} [N]_{\partial z}^T dV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_v \{ (s/r) [N] [N]_{\partial r}^T + (s/r^2) [N] [N]^T \} dV \\ \int_v \{ [N]_{\partial z} [N]_{\partial z}^T + [N]_{\partial r} [N]_{\partial r}^T + (1/r) [N] [N]_{\partial r}^T + (1/r) [N]_{\partial r} [N]^T + (1/r^2) [N] [N]^T \} dV \\ \int_v (s/r) [N] [N]_{\partial z}^T dV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [H_r'] \\ [H_\varphi'] \\ [H_z'] \end{pmatrix} \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_v \bar{H}^* \cdot \bar{H} dV \\
 & \doteq \begin{pmatrix} [H_r'^*] \\ [H_\varphi'^*] \\ [H_z'^*] \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \int_v [N] [N]^T dV & [O] & [O] \\ [O] & \int_v [N] [N]^T dV & [O] \\ [O] & [O] & \int_v [N] [N]^T dV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [H_r'] \\ [H_\varphi'] \\ [H_z'] \end{pmatrix} \quad (15)
 \end{aligned}$$

ただし、(14)及び(15)式の $[H_r']$ 、 $[H_\varphi']$ 、 $[H_z']$ は(16)式のように定義した。

$$\begin{aligned}
 [H_r'] &= \exp(-js\psi) [H_r] \\
 [H_\varphi'] &= \exp(-js\psi) [H_\varphi] \\
 [H_z'] &= \exp(-js\psi) [H_z] \quad (16)
 \end{aligned}$$

次に四面体要素について(12)及び(13)式は(18)及び(19)式のように離散化される。ここで、 $[N]_{\partial z}$ は、 $[N]$ の各成分を z に関して偏微分したものを成分とするベクトルである。

$$\begin{aligned}
 & \int_V (\nabla \times \bar{H})^* \cdot (\nabla \times \bar{H}) dV \\
 & \doteq \begin{pmatrix} [H_x^*] \\ [H_y^*] \\ [H_z^*] \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \int_V ([N]_{\partial y} [N]_{\partial y}^T + [N]_{\partial z} [N]_{\partial z}^T) dV & - \int_V [N]_{\partial y} [N]_{\partial x}^T dV \\ - \int_V [N]_{\partial x} [N]_{\partial y}^T dV & \int_V ([N]_{\partial z} [N]_{\partial z}^T + [N]_{\partial x} [N]_{\partial x}^T) dV \\ - \int_V [N]_{\partial x} [N]_{\partial z}^T dV & - \int_V [N]_{\partial y} [N]_{\partial z}^T dV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [H_x] \\ [H_y] \\ [H_z] \end{pmatrix} \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_V \bar{H}^* \cdot \bar{H} dV \\
 & \doteq \begin{pmatrix} [H_x^*] \\ [H_y^*] \\ [H_z^*] \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \int_V [N] [N]^T dV & [O] & [O] \\ [O] & \int_V [N] [N]^T dV & [O] \\ [O] & [O] & \int_V [N] [N]^T dV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [H_x] \\ [H_y] \\ [H_z] \end{pmatrix} \quad (18)
 \end{aligned}$$

(14) 及び (16) 式における変数 s は、三角形リング要素を用いる際、リング要素には対称性が必要であるため、扱えるモードは決まった自然数 s に対して、TE s ・モードあるいはTM s ・モードのマルチモードに限定される。一方、四面体要素にはそのような限定が無く、基底関数が表現できる範囲における全てのモードに関してマルチモード解析を行うことができる。一方、必要な節点数が多くなるため、係数行列 $[K]$ あるいは $[M]$ は大規模なものになり、これらを格納する記憶容量の問題が生じる。

各基底関数 N_{ei} は次の (19) 及び (20) 式のように、1 次 Lagrange 要素の基底関数の積で表現できる。三角形リング要素の場合は、節点 $e1$, $e3$, $e5$ に対応してそれぞれ L_1 , L_2 , L_3 とし、四面体要素の場合は、節点 $e1$, $e5$, $e7$, $e9$ に対応してそれぞれ L_1 , L_2 , L_3 , L_4 としている。

$$\begin{aligned}
 [N]^T &= [N_{e1} N_{e2} \cdots N_{e6}] \\
 &= [L_1 (2L_1 - 1) \quad 4L_1 L_2 \quad L_2 (2L_2 - 1) \quad 4L_2 L_3 \quad L_3 (2L_3 - 1) \quad 4L_1 L_3] \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [N]^T &= [N_{e1}N_{e2}\cdots N_{e10}] \\
 &= [L_1(2L_1-1) \quad 4L_1L_2 \quad 4L_1L_3 \quad 4L_1L_4 \quad L_2(2L_2-1) \\
 &\quad 4L_2L_3 \quad L_3(2L_3-1) \quad 4L_3L_4 \quad L_4(2L_4-1) \quad 4L_2L_4]
 \end{aligned} \tag{20}$$

(19) 及び (20) 式の 1 次 Lagrange 要素の基底関数 ($L_1 \sim L_3$ あるいは L_4) は、その対応した節点に関するシンプレックス座標 (または面積・体積座標) の成分と等価であるという事実があるため、ベクトル $[N]$ は各節点の大域座標系 (三角形リング要素については円柱座標系 (r, ψ, z), 四面体要素については Descartes 座標系 (x, y, z) における節点の座標) とは無関係に各要素毎の局所座標系であるシンプレックス座標系のみで定義できる。このことによって、係数行列 $[K]$ あるいは $[M]$ が効率良く計算でき、特に計算機資源が限られている場合は有効となる。

このように、(12) 及び (13) 式の離散化ができれば、(6) 式の積分汎関数 F は (21) 式のように離散化される。

$$\begin{aligned}
 F &\doteq [H^*]^T \left\{ \frac{1}{\epsilon_r} [K] + (\omega^2 \epsilon_0 \mu_0) \mu_r [M] \right\} [H] \\
 &= [H^*]^T [A] [H]
 \end{aligned} \tag{21}$$

(6) 式を停留させる $[\bar{H}]$ が、求める磁界 H の近似解であるので、 F の $[H]$ に関する変分原理を適用すると (22) 式が得られる。

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial F}{\partial H} \right] = [A] [H] \longleftrightarrow [O] \tag{22}$$

ただし、(22) 式の “ \longleftrightarrow ” は、(3) 式の自然境界条件以外の境界条件が設定された節点がある場合、係数行列 $[A]$ は特異行列になり、 $[A]$ に基本変形を施さない限り、“=” で結べないことを意味している。このような自然境界条件以外の境界条件の寄与 (次項で述べる特性インピーダンス終端) を (22) 式に加味することで、(23) 式のような行列方程式が得られる。

$$[A'] [H'] = [f] \tag{23}$$

5. 解析解を用いた境界条件

伝搬方向に不連続な導波路を解析する際、この導波路の入出力端に特性インピーダンス終端それぞれに接続して、対象となる不連続部以外での反射が全く無いという理想的な仮定を与えると、この不連続導波路のモード伝達問題は大幅に扱い易くなる。そのため、本研究では、解析解を用いた特性インピーダンス終端を表わす境界条件⁶⁾を採用し、これを (22) 式に適用することで (23) 式を導出する方法をとった。

まず、対象となる不連続導波路の入出力端に図-4 及び図-5 のように、有限長で様な導波

路を接続し、それぞれの一様導波路には、その一様な断面に一致した境界条件を課すための境界面と、境界面から見て内部側に同じ断面をした参照面を置く。

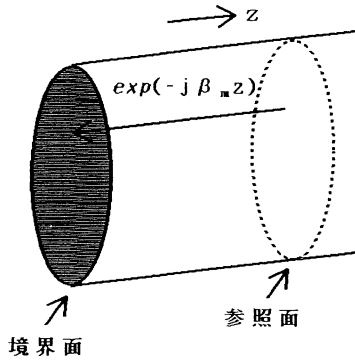


図-4 入力端での特性インピーダンス
境界条件モデル

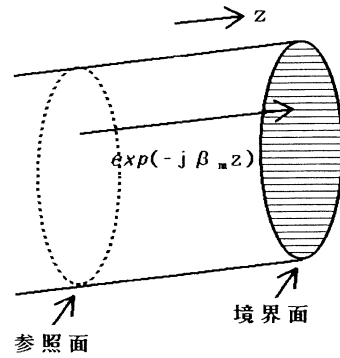


図-5 出力端での特性インピーダンス
境界条件モデル

ここで、入出力端それぞれの一様導波管について、伝搬し得る全てのモードの磁界の横場の解析解 $\bar{h}_m(\bar{r})$ 、位相定数 β_m と、境界面と参照面の距離 z が何らかの方法で既知になっているものとする。

図-4において、まず入射波を考えから除外し、不連続部からの反射についてのみ考えると、入力端の特性インピーダンス終端は、反射波を全て吸収すれば良いので、参照面の磁界の横場をそれぞれのモードについて分解して、各々に $\exp(-j\beta_m z)$ を乗じ、それ等を合成して境界面の磁界の横場とすることで境界条件とする。

次に、図-5における出力端の場合は、不連続部から来た透過波を全て吸収すれば良いので、入力端と同様に、参照面の磁界の横場をモード毎に分解し、それぞれに $\exp(-j\beta_m z)$ を乗じ、それ等を合成して境界面の磁界の横場とすることで境界条件とする。

以上により、入力端における入射波の取扱いを除いては、入力端と出力端での境界面と参照面の関係は同様なものであるので、入出力端を同等に扱って定式化すると、境界面、参照面の z 座標をそれぞれ z_{bord} 、 z_{ref} 、それぞれの面における磁界の横場を $\bar{H}(\bar{r}, z_{\text{bord}})$ 、 $\bar{H}(\bar{r}, z_{\text{ref}})$ とし、第 m 番モードの磁界のモード関数を $\bar{h}_m(\bar{r})$ とすると、 $\bar{H}(\bar{r}, z_{\text{bord}})$ と $\bar{H}(\bar{r}, z_{\text{ref}})$ の関係は (24) 式で示される。

$$\begin{aligned} \bar{H}(\bar{r}, z_{\text{bord}}) \\ = \sum_{m = \{\text{all mode}\}} \exp(-j\beta_m |z_{\text{bord}} - z_{\text{ref}}|) \bar{h}_m(\bar{r}) \cdot \int_{\Omega'} \bar{h}_m^*(\bar{r}') \cdot \bar{H}(\bar{r}', z_{\text{ref}}) d\Omega \end{aligned} \quad (24)$$

ただし、 Ω' に関する積分は、一様導波路の断面に関するものである。

仮に、話を Descartes 座標系の四面体要素に限定して、導波路の断面を $x - y$ 平面と解釈すると、(24) 式は (25) 式ようになる。

$$\begin{pmatrix} H_x(\bar{r}, z_{\text{bord}}) \\ H_y(\bar{r}, z_{\text{bord}}) \end{pmatrix} = \sum_m \exp(-j\beta_m |z_{\text{bord}} - z_{\text{ref}}|) \begin{pmatrix} h_{mx}(\bar{r}) \\ h_{my}(\bar{r}) \end{pmatrix} \cdot \int_{\Omega'} \{h_{mx}^*(\bar{r}') H_x(\bar{r}', z_{\text{ref}}) + h_{my}^*(\bar{r}') H_y(\bar{r}', z_{\text{ref}})\} d\Omega' \quad (25)$$

これを導波路の一樣部の断面における有限要素によって離散化して、断面を構成する全節点に関してまとめると参照面における磁界の横場と境界面における磁界の横場の離散化された関係式として (26) 式のような代数式を得る。

$$\begin{pmatrix} H_{x1} \\ H_{y1} \\ \vdots \\ H_{xn} \\ H_{yn} \end{pmatrix}_{\text{bord}} = \begin{pmatrix} z_{x1x1} & z_{x1y1} \cdots z_{x1xn} & z_{x1yn} \\ z_{y1x1} & z_{y1y1} \cdots z_{y1xn} & z_{y1yn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{xn x1} & z_{xn y1} \cdots z_{xn xn} & z_{xn yn} \\ z_{yn x1} & z_{yn y1} \cdots z_{yn xn} & z_{yn yn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{x1} \\ H_{y1} \\ \vdots \\ H_{xn} \\ H_{yn} \end{pmatrix}_{\text{ref}} \quad (26)$$

(26) 式を簡略化して (27) 式とする。

$$[H_{xy}]_{\text{bord}} = [z] [H_{xy}]_{\text{ref}} \quad (27)$$

一方、円柱座標系の三角形リング要素について、断面 $r - \theta$ 平面と解釈する時、ベクトルの内積に関して、

$$\begin{aligned} H_1 \cdot H_2 &= H_{1x}H_{2x} + H_{1y}H_{2y} \\ &= H_{1r}H_{2r} + H_{1\theta}H_{2\theta} \end{aligned} \quad (28)$$

の関係があるので、(25) 式に相当する式は添え字の「 x 」, 「 y 」を「 r 」, 「 θ 」に替えたものになり、四面体座標の場合と同じ要領で、(27) 式に相当する (29) 式が得られる。

$$[H_{r\theta}]_{\text{bord}} = [z] [H_{r\theta}]_{\text{ref}} \quad (29)$$

ここで、入力端における入射波についても考慮に入れ、(25) 式を (30) 式のように書き分ける。

$$\begin{aligned} [H_{xy}]_{\text{bord}} \cdot \text{in} &= [z]_{\text{in}} [H]_{\text{ref}} \cdot \text{in} + [f] \\ [H_{xy}]_{\text{bord}} \cdot \text{out} &= [z]_{\text{out}} [H]_{\text{ref}} \cdot \text{out} \end{aligned} \quad (30)$$

入力端における (24) 式での参照面と境界面の関係は、入射波の位相に逆行するものになる。

そのため、あらかじめ入力端の境界条件による影響を差し引いた波を入力しなければならない。したがって $\{\bar{f}\}$ は入力端の境界条件による影響を差し引いた入射波 \bar{f}' を離散化した際の、境界面上の節点値とする。

では、図-6 にこの \bar{f}' を導くために入力端の境界条件が入射波に与える影響について示す。

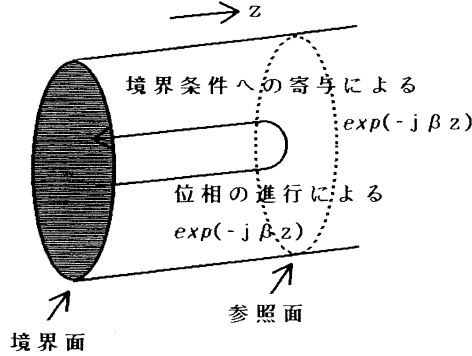


図-6 解析解を適応した際の入射波の影響

ここでは、入射波が被る影響について考えるので、反射波が無い前提で考えると、図-6 の参照面での磁界の横場は、 z だけ離れた境界面を基準にして、位相が $\exp(-j\beta z)$ だけ進行したものになるはずである。しかし、参照面の境界面への境界条件による寄与のために、参照面の磁界の横場からさらに $\exp(-j\beta z)$ だけ位相が進んで境界面に返って来る。したがって、 $\exp(-2j\beta z)$ だけ位相を進ませた磁界の横場を予め差し引けば良い。入力端から第 m 番目のモードが入った際、 \bar{f}' は (31) 式で示される。

$$\bar{f}' = \{1 - \exp(-2j\beta_m z)\} \bar{h}_m(\bar{r}) \quad (31)$$

(30) 式で示した特性インピーダンス終端を表わす境界条件を、本研究の問題に導入する際、本来なら《“参照面・境界面”と“不連続部”》，あるいは《“参照面”と“境界面”》をある程度離した方が、計算結果も安定することが期待できる。しかし、実際には計算機の資源の都合上、特に後者に関しては係数行列のバンド幅の増大につながるため、図-7 及び図-8 のように参照面を2つに増やして、それぞれ半分ずつ境界面に寄与させ、その代わりに、図-9 のように2次 Lagrange 要素一列分に境界面と2つの参照面を並べ、係数行列のバンド幅の増大を最小限に抑えるように工夫した。

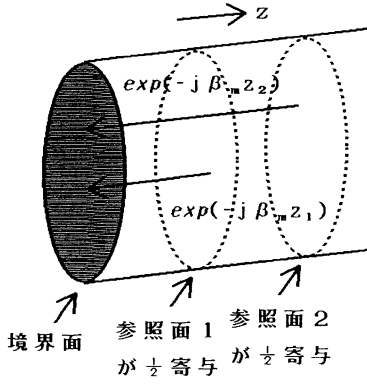


図-7 入力端での特性インピーダンス
境界条件モデル (参照面が2つ)

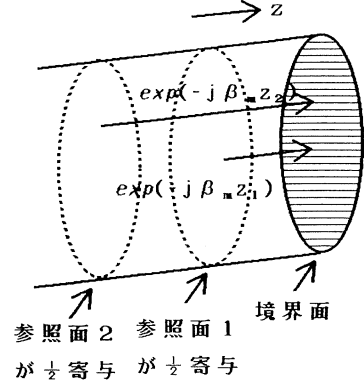


図-8 出力端での特性インピーダンス
境界条件モデル (参照面が2つ)

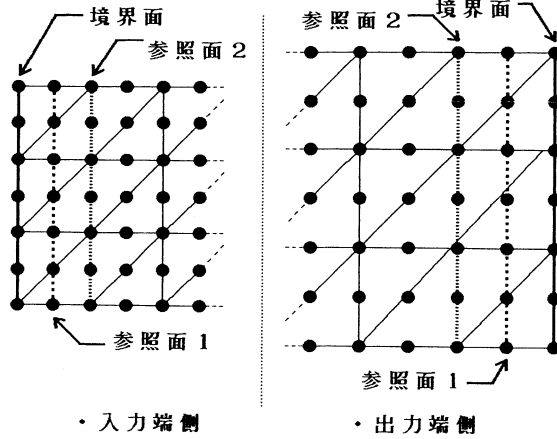


図-9 軸対称三角形リング要素を用いた時の境界面と参照面の設定位置

参照面を2つにし、境界面に対してそれぞれ半分ずつ寄与するようにしたので、(27) 式の代わりに (32) 式を用いる。

$$\begin{aligned} [H_{xy}]_{\text{bord}} &= \frac{1}{2} [z]_{\text{bord-ref1}} [H_{xy}]_{\text{ref1}} + \frac{1}{2} [z]_{\text{bord-ref2}} [H_{xy}]_{\text{ref2}} \\ &= [z]_1 [H_{xy}]_{\text{ref1}} + [z]_2 [H_{xy}]_{\text{ref2}} \end{aligned} \quad (32)$$

また、(30) 及び (31) 式に対応して (33) 及び (34) 式を用いる。

$$\begin{aligned} [H_{xy}]_{\text{bord} \cdot \text{in}} &= [z]_{\text{in1}} [H]_{\text{ref} \cdot \text{in1}} + [z]_{\text{in2}} [H]_{\text{ref} \cdot \text{in2}} + [f] \\ [H_{xy}]_{\text{bord} \cdot \text{out}} &= [z]_{\text{out1}} [H]_{\text{ref} \cdot \text{out1}} + [z]_{\text{out2}} [H]_{\text{ref} \cdot \text{out2}} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\bar{f}' = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \exp(-2j\beta_m z_1) - \frac{1}{2} \exp(-2j\beta_m z_2) \right\} \bar{h}_m(\bar{r}) \quad (34)$$

最後に、(33) 式で表わされた境界条件を (22) 式に適用して、(23) 式に対応した代数方程式 (35) 式を導出できる。

$$\begin{pmatrix} [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots \\ [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots \\ [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots \\ [0] \quad -[z]_{\text{in1}} \quad -[z]_{\text{in2}} \quad [1] \quad [0] \quad [0] \quad [0] \\ [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots \\ [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots [A] \cdots \\ [0] \quad [0] \quad [0] \quad [0] \quad -[z]_{\text{out1}} \quad -[z]_{\text{out2}} \quad [1] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [H]_{\text{other}} \\ [H_{xy}]_{\text{ref} \cdot \text{in1}} \\ [H_{xy}]_{\text{ref} \cdot \text{in2}} \\ [H_{xy}]_{\text{bord} \cdot \text{in}} \\ [H_{xy}]_{\text{ref} \cdot \text{out1}} \\ [H_{xy}]_{\text{ref} \cdot \text{out2}} \\ [H_{xy}]_{\text{bord} \cdot \text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] \\ [0] \\ [0] \\ [f] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \end{pmatrix} \quad (35)$$

ここで、 $[H_{xy}]_{\text{ref} \cdot \text{in1}}$ 、 $[H_{xy}]_{\text{ref} \cdot \text{in2}}$ は入力端側の参照面の磁界の横場を表わし、 $[H_{xy}]_{\text{bord} \cdot \text{in}}$ は入力端側の境界面の磁界の横場を表わし、 $[H_{xy}]_{\text{ref} \cdot \text{out1}}$ 、 $[H_{xy}]_{\text{ref} \cdot \text{out2}}$ は出力端側の参照面の磁界の横場を、 $[H_{xy}]_{\text{bord} \cdot \text{out}}$ は出力端側の境界面の磁界の横場を表わす。 $[H]_{\text{other}}$ は、 $[H]$ の内の上記の成分以外を表わす。また、 $[A] \cdots$ は (22) 式の $[A]$ の成分から変形する際に、変化の無かった部分の小行列、 $[0]$ は零小行列、 $[1]$ 単位小行列を表わす。

6. 数値実験

本研究では、軸対称三角形リング要素及び四面体要素を用い、対象として断面が一樣な円形の一樣導波管、あるいは特性インピーダンスが入射波の伝搬方向に指数関数的に変化し、円形の断面がその特性インピーダンスの変化にあわせて同心円状に拡大縮小する指数関数型のテーパ導波管 (EXP テーパ導波管) を用いてモード解析の数値実験を行った。

数値実験における (22) 式の $[A]$ に相当する係数行列は実対称の数千元オーダーの大規模行列であるが、(23) 式の $[A']$ に相当する係数行列は複素非対称の数千元オーダーの大規模バンド行列になる。したがって、(23) 式の行列方程式を解く際には、文献⁷⁾による 2 行 2 列の 2 重のアンローリングを施した実数帯行列用の kji 型外積形式 Gauss 法による LU 分解のプログラムを複素行列用に作り替えて導入した。また、複素行列用に作り替える際には、ピボット選択の際の係数行列の成分評価には、複素数の絶対値をノルムに用いた。

まず、軸対称三角形リング要素を用いて一様導波管及び EXP テーパ導波管を解析した。図-10に入力端、出力端の直径54mmと69mm、全長266mmの EXP テーパ部の前後にそれぞれ133mmの一様部を付けた導波管を解析した際の要素分割の様子を示す。

図-10のモデルの節点数は2541、要素数は1200で、各節点毎に未知変数が3成分あるので、係数行列は7623元である。また、行列のバンド幅は190であった。

この様なモデリングを直径54mm一様導波管に施して、基本モード TE_{11} のみが伝搬できる周波数3.4GHz の TE_{11} モードを入射

して、導波管内の TE_{11} モードを計算した。図-11は、計算結果の TE_{11} の複素振幅である。図-11における四角マークが複素振幅の実部で、蝶々マークが虚部である。図-12は、複素振幅の絶対値（砂時計マーク）を示している。図-12において、最小値0.997、最大値1.004に縮尺を変えていることに注意。以下同様。入射波は振幅1で、図の左から右へ伝搬する様に示した。

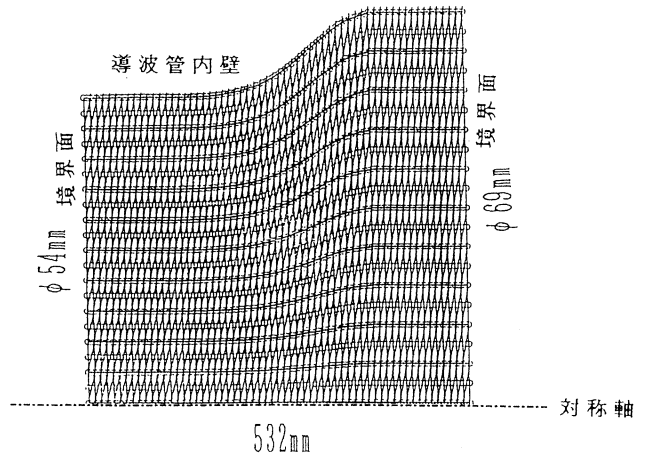


図-10 軸対称三角形リング要素によるモデリング

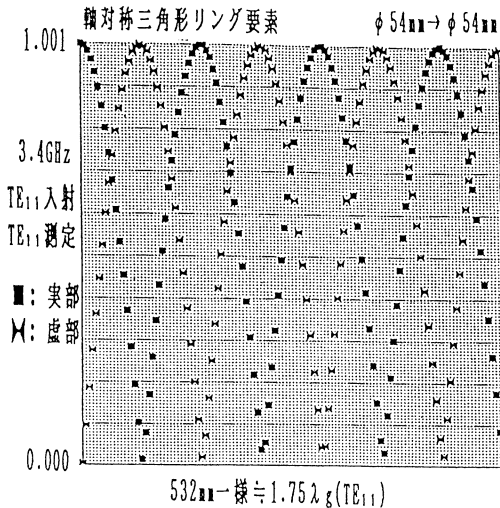


図-11 軸対称三角形リング要素による一様導波管の解析その1 (複素振幅)

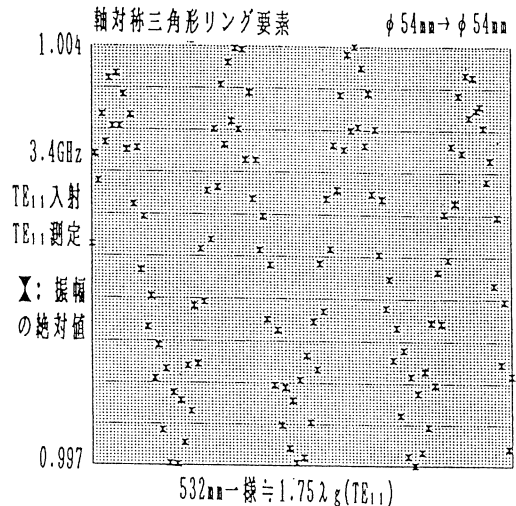


図-12 軸対称三角形リング要素による一様導波管の解析その2 (複素振幅の絶対値)

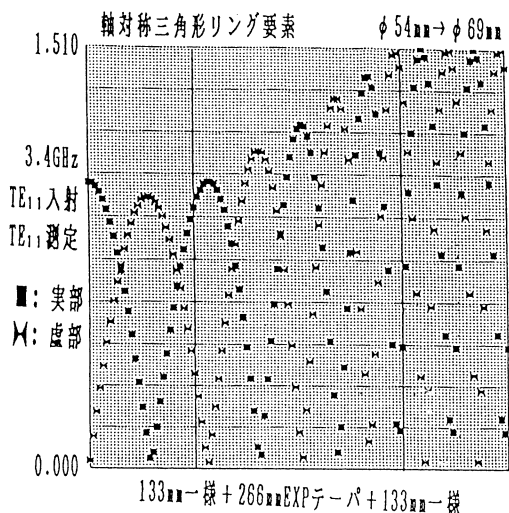


図-13 軸対称三角形リング要素による
EXP テーパ導波管の解析その 1
(TE₁₁モードの複素振幅)

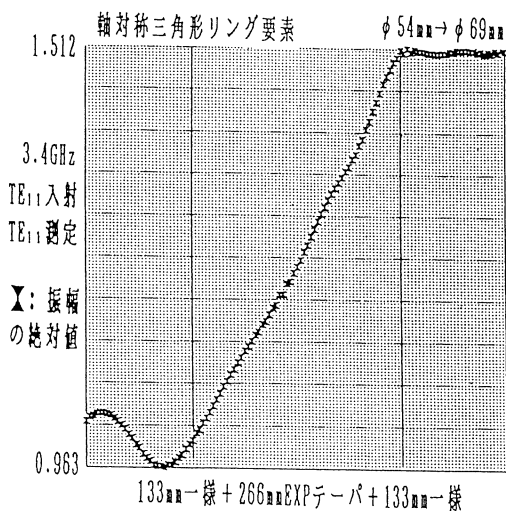


図-14 軸対称三角形リング要素による
EXP テーパ導波管の解析その 2
(TE₁₁モードの絶対値)

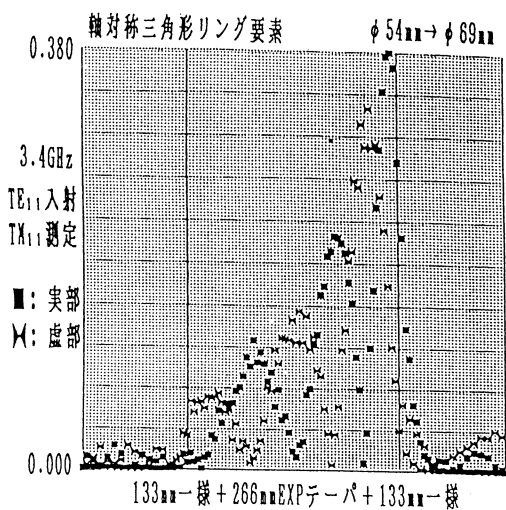


図-15 軸対称三角形リング要素による
EXP テーパ導波管の解析その 3
(TM₁₁モードの複素振幅)

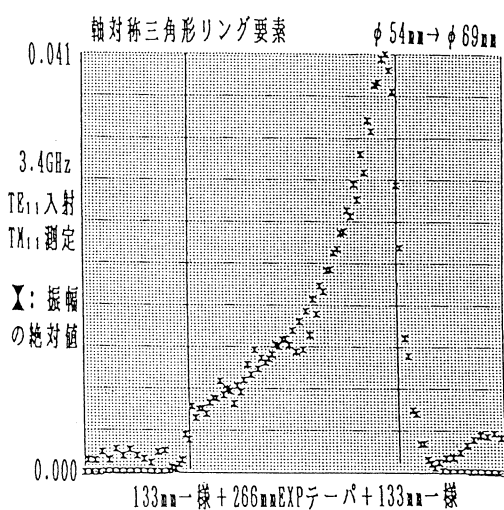


図-16 軸対称三角形リング要素による
EXP テーパ導波管の解析その 4
(TM₁₁モードの絶対値)

図-11を観察する限りではきれいな正弦波の複素振幅が示された。しかし、縦軸が拡大された図-12を見ると、振幅の絶対値には理論値1.000から0.003~0.004、即ち-50~-40dB程度、主に有限要素による離散化誤差が原因と考えられる僅かな誤差となる揺らぎが認められた。

次に、図-10に示したモデルのような入力端直径54mm、出力端直径69mmのEXPテーパ導波管に直径54mm、あるいは69mmの一樣導波管では基本モード TE_{11} のみが伝搬できる周波数3.4GHzの TE_{11} モードを入射して、導波管内の TE_{11} モード及び TM_{11} モードを計算した。図-13は計算結果の TE_{11} モードの複素振幅、図-14は TE_{11} モードの複素振幅の絶対値、図-15は TM_{11} モードの複素振幅、図-16は TM_{11} モードの複素振幅の絶対値を示している。

図-14における出力端側の複素振幅の絶対値1.512は、大間かな意味で直径54mmの入力端に入射した振幅1の TE_{11} モードがエネルギーの損失無しで直径69mmの出力端へ透過した場合の TE_{11} モードの振幅の絶対値と同じ値になる。また、図-15及び図-16から、 TE_{11} モードを入射した際に、出力端側のテーパ部と一樣部の境目に、一樣導波管では非伝搬の TE_{11} モードのピークが観測された。このEXPテーパ導波管については3.3GHz～4.3GHzまで入射波の周波数のみを変化させて計算したが、いずれの周波数においても同様の TE_{11} モードのピークが観測された。

図-17は、図-10のモデルのEXPテーパに関して入射波の周波数を3.3GHz～4.3GHzまで変化させて入力反射係数 ρ_0 についての周波数特性を計算した結果である。また、図-18には(11)式を基にして計算した伝送線路モデルを用いたユニ・モード解析の理論における ρ_0 の周波数特性を示した。

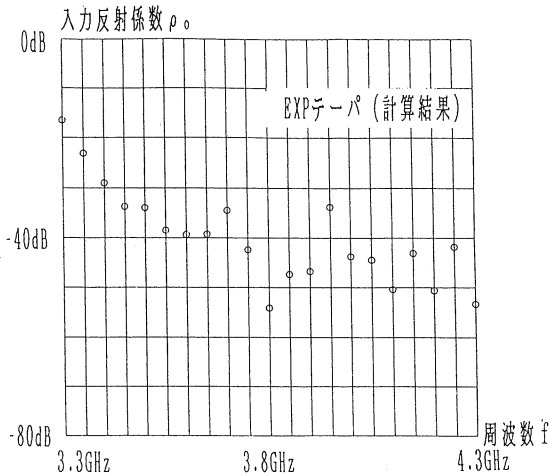


図-17 軸対称三角形リング要素による
EXPテーパ導波管の解析その5
(反射係数の周波数特性)

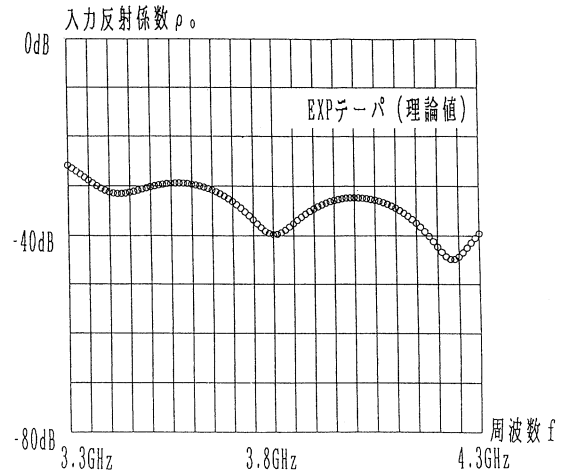


図-18 伝送線路モデルを用いた
EXPテーパ導波管の反射係数の
理論値

次に、四面体要素を用いて一樣導波管を解析した。図-19及び図-20にそれぞれ直径54mm、全長106.4mmの一樣導波管を解析した際の要素分割の様子を示す。

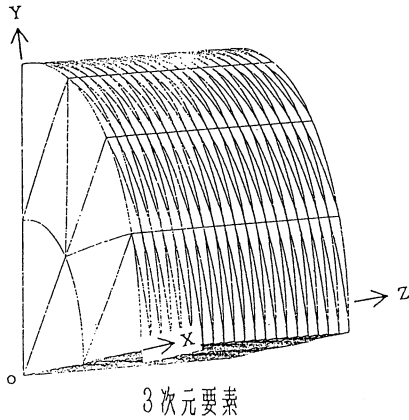


図-19 四面体要素によるモデリング
その1 (隠面処理図)

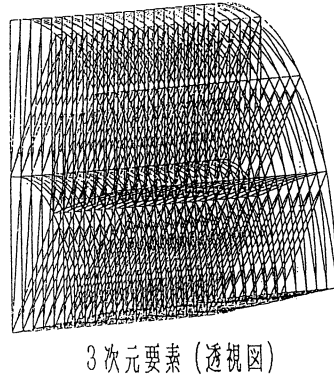


図-20 四面体要素によるモデリング
その2 (透視図)

図-19及び図-20のモデルの節点数は1025, 要素数は480, 係数行列は3075元である。また, 係数行列の半バンド幅は224であった。

図-19及び図-20のモデルの直径54mmの一様導波管に, 基本モード TE_{11} モードを入射して導波管内の TE_{11} モードを計算した。また同時に, 同じ導波管を軸対称三角形リング要素でモデリングして TE_{11} モードを計算した結果を信頼できる比較対象として示した。図-21は四面体要素で計算した TE_{11} モードの複素振幅, 図-22は軸対称三角形リング要素で計算した TE_{11} モードの複素振幅を示している。

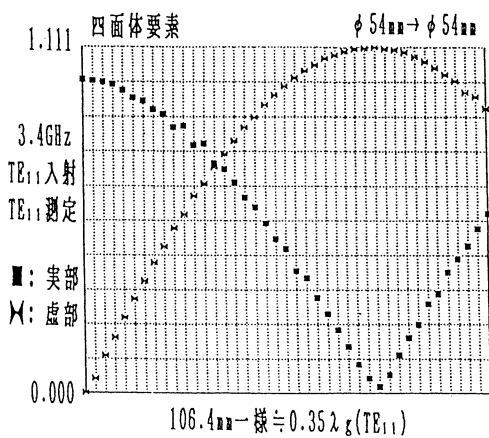


図-21 軸対称三角形リング要素による
一様導波管の解析
(図-21との比較用)

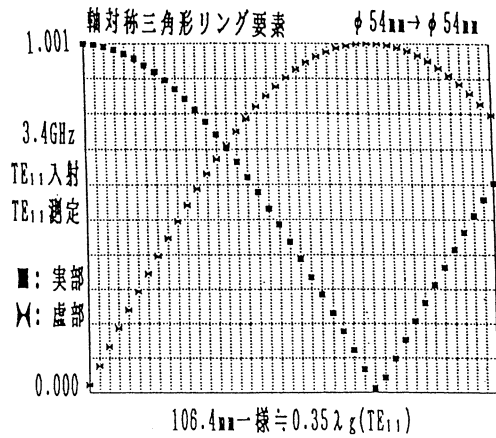


図-22 四面体要素による一様導波管の解析

図-21から、四面体要素での複素振幅は、入射波が進行するにつれて、その絶対値が大きくなって全体的に見て定常波になっているのが観測できる。これは、四面体要素と特性インピーダンス終端モデルとの間に不整合が生じているためであると考ええる。

7. おわりに

本研究では有限要素法を用いて円形テーパ導波管のマルチモード解析を行った。本研究の数値実験において軸対称三角形リング要素を用いた際、解析したEXPテーパ導波管のテーパ部の出力端側に一様導波管では非伝搬のモードのピークを観測した。この現象は、導波管のテーパ部によるモード変換と考えられる。今後はEXP以外の特性インピーダンス分布をしたテーパ導波管についても適用し、非伝搬モードのピークと各テーパの特性インピーダンスの分布との関係を明らかにすべきと考ええる。

四面体要素を用いて一様導波管を解析した際には、現在の要素分割では観測した基本モードの複素振幅が入射の進行方向について次第に大きくなったことが確認できた。この原因と考えられる四面体要素と特性インピーダンス終端モデルとの関係については、要素及び基底関数の選択、要素分割の方法、並びにそれ等に密接に関連している計算機資源の分割と代数方程式の解法、さらには問題を限定にした場合等について考察することが必要であると考ええる。

本研究の動機づけと有益なご助言をいただいたアンテン株式会社取締役玉川 晋氏に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) J.A.Stratton : 電磁理論 (桜井時夫訳, 生産技術センター, 1975)
- 2) 林 毅, 村 外志夫 : 変分法 (コロナ社, 1958)
- 3) R.W.Klofenstein : Proc. IRE, vol. 4, pp.31-35 (1956)
- 4) K.H.Huebner : 有限要素法 (山田嘉昭訳, 科学技術出版社, 1978)
- 5) O.C.Zienkiewicz : 基礎工学におけるマトリックス有限要素法 (吉識雅夫, 山田嘉昭共監訳, 培風館, 1975)
- 6) 加川幸雄, 小柴正則, 池内雅紀, 鏡 慎 : 電気・電子のための有限/境界要素法 (オーム社, 1984)
- 7) 小国 力 監 : 行列計算ソフトウェア WS, スーパーコン, 並列計算機 - (丸善, 1991)